Παρατήρηση: 18/5/20

Αν $d_1, \dots, d_s$ είναι η ακολουθία αναλλοίωτων παραγ. του $M \Rightarrow \operatorname{rank} M =$ πλήθος του $d_i = 0$

$$M = R/\operatorname{Ann} M_1 \oplus \dots \oplus R/\operatorname{Ann} M_r \oplus R/\langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle 0 \rangle$$

<u>πχ</u> $\mathbb{Z}^3/\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle \bar{0} \rangle$

$$'' \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{rank}(\mathbb{Z}/\operatorname{Im}) = 1$$

$$\simeq \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$$

$(\bar{1}_2, 1, 0)$ $\quad \bar{1}_2, 1, 0, 0 \dots$

$(\bar{1}_2, 0, 1)$ $\quad \bar{1}_2, 0, 1, 0 \dots$

$\quad \bar{1}_2, 0, 0, 1 \dots$

Μόδια Ελεύθερης Στρέψης

Θεώρημα: Έστω R ακέραια περιοχή και M R-μόδιο
Θεωρώ $T(M) = \{m \in M,\ \exists\, r \in R \setminus \{0\} : rm = 0\}$
Ισχύει $T(M) \leq M$ και $T(M/T(M)) = 0$

απόδ

i) Παρατηρώ $T(M) \neq \emptyset$ καθώς $0_M \in T(M)$ καθώς $r \cdot 0_M = 0_M$
Έστω $x_1 \in T(M) \Rightarrow \exists\, r_1 \neq 0 \in R : r_1 \cdot x_1 = 0$
$x_2 \in T(M) \Rightarrow \exists\, r_2 \overset{\in R}{\neq} 0 : r_2 x_2 = 0$

Για να δείξω ότι $x_1 - x_2 \in T(M)$ αρκεί να βρώ $\underset{\in R}{? \neq 0}$
$?(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{\neq 0 \text{ αφού } R \text{ Ακ. Π}} (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$

$r_1 r_2 x_1 - r_1 r_2 x_2 = 0 \Rightarrow r_2 \underbrace{r_1 x_1}_{=0} - r_1 \underbrace{r_2 x_2}_{=0} = 0 \Rightarrow 0 = 0$
$\Rightarrow x_1 - x_2 \in T(M)$

ii) Έστω $r \overset{\neq 0}{\in} R$, $x \in T(M)$ $(\exists\, r_1 \underset{\in R}{\neq 0} : r_1 \cdot x = 0)$
$rx \in T(M)$,
Παρατ. ότι $\exists\, r_1 \neq 0 \in R$
(επειδή $r, r_1 \neq 0_R$, R Α.Π. άρα $r \cdot r_1 \neq 0$)
Άρα, $r_1(r \cdot x) = r(r_1 \cdot x) = r \cdot 0 = 0 \Rightarrow$
$rx \in T(M)$
Επομένως $T(M) \leq M$

Άσκηση Θ.δ.ο. $T(M/T(M)) = 0$
Έστω ότι $x + T(M) \in M/T(M)$
$x + T(M) \in T(M/T(M))$
$\exists\, r_1 \overset{\neq 0}{\in} R : r_1(x + T(M)) = 0 + T(M) \Rightarrow$
$r_1 x + T(M) = 0 + T(M) \Rightarrow r_1 x \in T(M) \Rightarrow$
$\exists\, r_2 \overset{\neq 0}{\in} R : r_2(r_1 x) = 0 \Rightarrow$
Παρατ. ότι $\exists\, r_2 r_1 \neq 0$

$(r_2 r_1)x = 0$

$x \in T(M)$ άρα $\Leftrightarrow x + T(M) = 0 + T(M)$

$\Rightarrow T(M/T(M)) = 0$

<u>Ορισμός</u>: Το υπομόδιο $T(M)$ καλείται υπομόδιο στρέψης του M.

<u>Ορισμός</u>: Αν $T(M) = 0 \Rightarrow$ το M καλείται μόδιο ελεύθερης στρέψης

<u>Ορισμός</u>: Αν $T(M) = M \Rightarrow$ το M καλείται μόδιο στρέψης

<u>πχ</u> $R = \mathbb{Z}$

$M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \Rightarrow T(M) = \langle(\bar{1}_3, 0)\rangle$

$= \{(\bar{1}_3, 0), (\bar{0}_3, 0), (\bar{2}_3, 0)\}$

$$M/T(M) = \frac{\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}}{\langle(\bar{1}_3, 0)\rangle} \simeq \mathbb{Z}/\langle 0\rangle \simeq \mathbb{Z}$$

R σώμα, $x \in$ σώμα, $x(\ ) = 0$ δεν γίνεται $\neq 0$

πρέπει το $(\ )$ να είναι 0.

Άρα, το σώμα είναι πάντα ελεύθερης στρέψης.

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε ελεύθερο μόδιο υπεράνω R ακέραιας περιοχής είναι ελεύθερης στρέψης

<u>αποδ</u> Θδο $T(M) = 0$.

Έστω M ελεύθερο $\Rightarrow \exists (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ βάση του $M \Rightarrow$

$\forall m \in M, \exists r_i \in R : m = r_1\mu_1 + \ldots + r_s\mu_s$ $\Big\} \Rightarrow$

Έστω $m \in T(M) \Rightarrow \exists r \overset{\neq 0}{\in} R : rm = 0$

$r(r_1\mu_1 + \ldots + r_s\mu_s) = 0 \Rightarrow$

$rr_1\mu_1 + \ldots + rr_s\mu_s = 0$

αφού $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ βάση $\Rightarrow$
$r \cdot r_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, s$

Αλλά R Α.Π. και $r \in R$, $r \neq 0_R$ $\Rightarrow$
$r_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, s$ $\Rightarrow m^{\in T(M)} = r_1\mu_1 + \dots + r_s\mu_s =$
$0\mu_1 + \dots + 0\mu_s = 0$
Άρα, $T(M) = 0$

<u>Πρόταση</u>: Έστω R Π.Κ.Ι. και M πεπερασμένα παραγ. R-μόδιο $\Rightarrow \exists$ ελεύθερο R-μόδιο $F \leq M$.
$M = T(M) \oplus F$

<u>Πρόταση</u>: Έστω M πεπερ. παραγ. ελεύθερο στρέψης R-μόδιο όπου R Π.Κ.Ι. $\Rightarrow$ το M είναι ελεύθερο
$M = T(M) \oplus F \Rightarrow M/T(M) \cong F \overset{T(M)=0}{\Leftrightarrow} M \cong F$

<u>Πρόταση</u>: Έστω R ΠΚΙ και M ένα κυκλικό R-μόδιο
Έστω ότι $Ann(M) = \langle d \rangle \neq 0$, όπου $d = r \cdot s$
$\mu\kappa\delta(r,s) = 1 \Rightarrow \exists$ κυκλικοί υπομόδιοι $A, B \leq M$
$M = A \oplus B$ και $Ann\, A = \langle r \rangle$, $Ann\, B = \langle s \rangle$

<u>αποδ</u>. Είμαστε σε ΠΚΙ
Έστω $Ann(M) = \langle d \rangle$
$d = rs$, $\mu\kappa\delta(r,s) = 1$
$\Rightarrow 1 = xr + ys$
$\langle r, s \rangle = \langle 1 \rangle$.
Θεωρώ $M = \langle m \rangle$ ως κυκλικό R-μόδιο
Θέτω $A = \langle sm \rangle$, $B = \langle rm \rangle$.
Ισχυρίζομαι $M = A \oplus B$
Έστω $m \in M$, προφανώς $m = m \cdot 1 = m(xr + ys)$
$= \underbrace{(mx)r}_{\in B} + \underbrace{(my)s}_{\in A} \in A + B$

Αντίστροφα,

Έστω $x \in A + B \Rightarrow x = r_1 a + r_2 \beta =$

$= r_1 (r_2 s m) + r_2 (r_3 r m) = m(r_1 r_2 s + r_2 r_3 r) \in M$

$\Rightarrow A + B \subseteq M$

Άρα, $M = A + B$

Για $A \oplus B$, έστω $k \in A \cap B$. Αρκεί νδο $k = 0$

$$\left.\begin{array}{l} k = k1 = k(rx + sy) = rxk + syk \\ k \in A \Rightarrow \exists\, r_1 \in R : k = r_1 s m \\ k \in B \Rightarrow \exists\, r_2 \in R : k = r_2 r m \end{array}\right\} \Rightarrow k = r x r_1 s m + s y r_2 r m$$

$= r_1 (rs) x m + r_2 (rs) y m = r_1 d x m + r_2 d y m$

$= r_1 x d m + r_2 y d m = r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot 0 = 0$

Άρα, $A \cap B = 0 \Rightarrow M = A \oplus B$

Έστω $x \in Ann A$ $(A = \langle sm \rangle) \Rightarrow$

$x s m = 0 \Rightarrow (xs) m = 0 \xRightarrow{R\ \Pi K I}$

$xs \in Ann(\langle m \rangle) \Rightarrow xs \in Ann M = \langle d \rangle \Rightarrow$

$xs \in \langle d \rangle = \langle rs \rangle \Rightarrow rs \mid xs \overset{r \neq 0}{\Rightarrow} r \mid x \underset{\mu\kappa\delta(r,s)=1}{\Rightarrow}$

$x \in \langle r \rangle \Rightarrow Ann A \subseteq \langle r \rangle$

Θδ.ο. $Ann A \supseteq \langle r \rangle$

Έστω $y \in \langle r \rangle \Rightarrow \exists\, k \neq 0 \in R : y = k \cdot r$

Θδο $y \in Ann A$

Παρατηρώ ότι $\underbrace{(kr)}_{y} \underbrace{r'}_{\in R} (sm) =$

$k r' (rs) m = k r' d m = k r' 0 = 0 \Rightarrow$

$y \in Ann A$.

Άρα $Ann A \supseteq \langle r \rangle$

Επομένως $Ann A = \langle r \rangle$

Όμοια και $Ann B = \langle s \rangle$

Τελικά, $M = A \oplus B$
$\mathrm{Ann}\,M = d$
$\mathrm{Ann}\,A = r$, $d = rs$
$\mathrm{Ann}\,B = s$, $\mu\kappa\delta(r,s) = 1$.

Πρόταση (Γενίκευση του προηγούμενου)
Έστω R ΠΚΙ και M κυκλικό R-μόδιο, με $\mathrm{Ann}\,M = \langle d \rangle$, όπου $d = c\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ όπου όλα τα p_i ανάγωγα και μη συντροφικά ανά δύο.
(p ανάγωγο αν μη αντιστρέψιμο και $p = \alpha\beta \Rightarrow$ α αντιστρέψιμο ή β αντιστρέψιμο)
$\Rightarrow M = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ με A_i κυκλικοί υπομόδιοι του M και $\mathrm{Ann}(A_i) = \langle p_i^{n_i} \rangle$

Θεώρημα Δομής Ι:
$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$, όπου $d_1 | \cdots | d_s$ με $\mathrm{Ann}\,M_1 = \langle d_1 \rangle$ και μοναδικότητα.

Θεώρημα Δομής ΙΙ (Πρόταση $\oplus$ Θεώρημα Δομής Ι)
$M_1 \to A_{1_1} \oplus \cdots \oplus A_{s_1}$
$M_2 \to A_{1_2} \oplus \cdots \oplus A_{s_2}$
$\vdots$
$M_s \to A_{1s} \oplus \cdots \oplus A_{ss}$
(Μπορεί να είναι κάποια ελεύθερα, δηλ να μην γίνεται η παραπάνω ανάλυση)

Επομένως, διατύπωση
Έστω R ΠΚΙ και M ένα πεπερ. παραγ. R-μόδιο
Τότε, $\exists$ κυκλικοί υπομόδιοι του M, $N_1, \ldots, N_r$
$F_1, \ldots, F_u$, $r \geq 0$, $u \geq 0$
έτσι ώστε

1) $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_r \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_u$

2) $\mathrm{Ann}\, N_i = \langle p_i^{n_i} \rangle$, όπου p_i ανάγωγα του R
$n_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, r$
$(\mathrm{Ann}\, M = d,\ d = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k})$

3) Τα F_i είναι ελεύθερα, $\mathrm{rank} F_i = 1$

4) Μοναδικότητα, αν $N_1', \ldots, N_r', F_1', \ldots, F_u' \in M$
$M = N_1' \oplus \ldots \oplus N_r' \oplus F_1' \oplus \ldots \oplus F_u' \Rightarrow r = r',\ u = u'$
με πιθανή αναδιάταξη των δεικτών έχουμε
ότι $\mathrm{Ann}(N_i) = \mathrm{Ann}(N_i')$

Απόδειξη (Σκιαγράφηση)
Από ΘΔ I: $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$
$\mathrm{Ann}\, M_i = \langle d_i \rangle$, $i = 1, \ldots, r$
$\mathrm{Ann}\, M_j = 0$ για $j = r+1, \ldots, s$
άρα M_j ελεύθερα
Θέτω $F_1 = M_{r+1}$, $F_2 = M_{r+2}, \ldots, F_u = M_s$
$$\Rightarrow M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r \oplus \underbrace{F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_u}_{\text{ελεύθερα}}$$

$d_1 | \ldots | d_r$
Από προηγούμενη πρόταση, την εφαρμόζω
$\forall M_i$, $i = 1, \ldots, r$
$d_1 : M_1 = A_{11} \oplus A_{21} \oplus \ldots \oplus A_{k_1}$, Ann...
$d_2 : M_2 = A_{12} \oplus A_{22} \oplus \ldots \oplus A_{k_2}$, Ann...
$\vdots$
$d_r : M_r = A_{1r} \oplus A_{2r} \oplus \ldots \oplus A_{k_r}$
(λείπει η μοναδικότητα)

"Μεταφράζοντας" το προηγ. θεώρημα
$\exists$ ανάγωγα στοιχεία $p_1, \ldots, p_k \in R$ και $n_{1i}, \ldots, n_{ki} \in \mathbb{N}$
$$M \simeq R/\langle p_1^{n_{11}} \rangle \oplus R/\langle p_1^{n_{21}} \rangle \oplus \ldots \oplus R/\langle p_1^{n_{k1}} \rangle \oplus$$
$$R/\langle p_2^{n_{12}} \rangle \oplus R/\langle p_2^{n_{22}} \rangle \oplus \ldots \oplus R/\langle p_2^{n_{k2}} \rangle \oplus$$

$\vdots$

$$R/\langle p_k^{n_{1k}}\rangle \oplus R/\langle p_k^{n_{2k}}\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_k^{n_{kk}}\rangle$$

όλοι παρανομαστές μοναδικοί ως προς τη συντροφικότητα.

<u>Ορισμός</u>: Τα στοιχεία $p_1^{n_{11}}, p_1^{n_{12}}, \dots, p_1^{n_{1k}}, p_2^{n_{22}}, \dots, p_2^{n_{2k}}, p_k^{n_{k1}}, p_k^{n_{k2}}, \dots, p_k^{n_{kk}}$ λέγονται στοιχειώδεις διαιρέτες του M.